ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

Εαν η δυναμοσειρά : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ συγκλίνει στο δίσκο $|z-z_0|<R$ με $R>0$, τοτε το αθροισμα $f(z)$ αυτής είναι μία ολόμορφη συνάρτηση στο δίσκο σύγκλισής της (και αντιστρόφως).

Συμπερασμα!

Εαν μία συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη στον ανοιχτό τόπο D του $\mathbb{C}$, με $z_0 \in D$ και R η απόσταση του z_0 απο το ∂D, τοτε υπαρχει μοναδική δυναμοσειρά κεντρου z_0 τετοια ώστε!

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z : |z-z_0|<R$$

Η σειρά αυτή λέγεται σειρά Taylor της $f(z)$ κεντρου z_0

Σε περίπτωση οπου $z_0=0$ η σειρά θα καλείται σειρά Mac Laurin.

Ορισμένα εύχρηστα αναπτύγματα Mac Laurin είναι :

α) $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , |z|<1$

β) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , z\in\mathbb{C}$

γ) $\eta\mu z=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , z\in\mathbb{C}$

δ) $\sigma\upsilon\nu z=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , z\in\mathbb{C}$

ε) $Log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} \quad , |z|<1$

στ) $(1+z)^k=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^n \quad , |z|<1$

Θα μελετησουμε την $f(z)=Log(1+z)$ με $f(0)=0$ και θα προσδιορίσαμε τον τοπο σύγκλισης της

Εφαρμογή:

Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κοντά στο 0 η συνάρτηση $Log(1+z)$ με $f(0)=0$ και να προσδιοριστεί ο τόπος σύγκλισης της

ΛΥΣΗ

$$f'(z)=\frac{1}{1+z},\quad f''(z)=-\frac{1}{(1+z^2)},\quad f'''(z)=\frac{2}{(1+z)^3},\quad f^{(4)}(z)=-\frac{6}{(1+z)^4}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+z)^n}$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=2,\ f^{(4)}(0)=-6,\ \ldots$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots=$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{4}-\frac{z^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$$ όπου συγκλίνει

απο το κρ. D'alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot z^{n+1}\cdot n}{(-1)^{n-1}\cdot z^n(z+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot z\right|=|z|$$

Άσκηση

Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0=1$ η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$

ΛΥΣΗ

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{z}{(z-i)(z+i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=(z+i)A+(z-i)B\Leftrightarrow z=(A+B)z+(A-B)i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+B=1 \text{ και } A-B=0\Leftrightarrow A+A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

Άρα,

$$f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$$

Έστω $g(z)=\dfrac{1}{z-i}$ και $h(z)=\dfrac{1}{z+i}$ για $z\neq i$ και $z\neq -i$ αντιστοίχως.

$$g'(z)=-\frac{1}{(z-i)^2},\quad g''(z)=\frac{2}{(z-i)^3},\quad g'''(z)=-\frac{6}{(z-i)^4},\dots,$$

$$g^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{n!}{(z-i)^{n+1}}$$

$$g(1)=\frac{1}{1-i},\quad g'(1)=-\frac{1}{(1-i)^2},\dots,\quad g^{(n)}(1)=\frac{(-1)^n\, n!}{(1-i)^{n+1}}$$

Η απόσταση του $z_0=1$ από το i είναι $|1-i|=\sqrt{2}$

Έτσι,

$$g(z)=\frac{1}{z-i}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}(z-1)^n$$

Από την άλλη με όμοιο τρόπο

$$h(z)=\frac{1}{z+i}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-1)^n$$

Άρα,

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-1)^n,\quad |z-1|<\sqrt{2}$$

Και μπορούμε να το απλοποιήσουμε/συμπτύξουμε και άλλο

$$1-i=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad i+1=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\,\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{(1-i)^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}=\frac{(1+i)^{n+1}+(1-i)^{n+1}}{\left((1-i)(1+i)\right)^{n+1}}=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 2\,\text{συν}\frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{n+1}}$$

άρα.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\text{συν}\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}(z-1)^n,\quad |z-1|<\sqrt{2}$$